TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA II, 26 JUNI 2007, 9:00 - 12:00

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad ook het aantal ingeleverde bladen.

(1) Bepaal (met uitleg!) de dimensie van de lineaire ruimte van antisymmetrische $n \times n$ matrices (dus: matrices met $A^t = -A$).

(2) De ruimte van alle reële 2×2 matrices is een lineaire ruimte van dimensie 4. Leg van elke hieronder genoemde deelverzameling ervan uit, of het wel of geen lineaire deelruimte is.
  (a) De inverteerbare matrices;
  (b) De diagonaliseerbare matrices;
  (c) De normale matrices.

(3) Op $\mathbb{R}^4$ zetten we de kwadratische vorm

$$q(a,b,c,d) := (a+bi) \cdot \overline{(c+di)} + \overline{(a+bi)} \cdot (c+di).$$

Schrijf deze vorm in de gedaante $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ waarbij A een symmetrische 4×4 matrix is. Is de matrix A positief definiet / negatief definiet / positief semidefiniet/ negatief semidefiniet / indefiniet?

(4) Voor een complexe matrix $A = (a_{i,j})$ definiëren we $\mu(A) := \max|a_{i,j}|$ (hier nemen we het maximum over alle paren i,j). Toon aan, dat voor een product van matrices $A \cdot B$ geldt

$$\mu(A \cdot B) \leq n\mu(A)\mu(B)$$

waarbij n het aantal kolommen van A is.

(5) De reële 3×3 matrix A voldoet aan $A^2 = A$. Leg uit, dat hieruit volgt dat A diagonaliseerbaar is (Hint: als A niet diagonaliseerbaar zou zijn, dan kan je narekenen dat de Jordan normaalvorm van A niet gelijk is aan z'n eigen kwadraat).

(6) Toon aan, dat reële $n \times n$ matrices A met de eigenschap $A^2 = -I$ bestaan dan en slechts dan als n even is. (Hint: voor even n maak je een voorbeeld met steeds dezelfde 2×2 matrix 'op de diagonaal', en verder nullen. En voor oneven n toon je aan, dat het karakteristieke polynoom van zo'n matrix van de vorm $(i-\lambda)^a(-i-\lambda)^{n-a}$ is, en de constante term hierin is niet reëel).

(7) Op de ruimte $\mathcal{P}_n$ van alle veeltermen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ zetten we de lineaire operator $L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$. Bepaal de Jordan-normaalvorm van L.